

## Examen Final

- Durée de l'épreuve : 2 heures.
- Documents, Téléphone portable et calculatrice interdits.
- Un 0,5 sera enlevé à tout étudiant qui ne mettra pas le nom ou le numéro du groupe sur sa copie.

### Exercice 1 (3,5 points)

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}^+$ , non vide et bornée.

Soit

$$D = \{\sqrt{x} : x \in A\}$$

1. Montrer que  $D$  est bornée.
2. Montrer que  $\inf D = \sqrt{\inf A}$  et  $\sup D = \sqrt{\sup A}$ .

### Exercice 2 (3+5 points)

1. Soit  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$   $n \geq 1$

(a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

(b) En déduire que

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1 \quad \forall n \geq 1.$$

(c) Déterminer la limite de  $H_n$ .

(d) Montrer que  $v_n = H_n - \ln(n)$  est décroissante positive. Que peut-on conclure ?

2. Posons  $f(x) = \cos x$  tel que  $x \in [0, 1]$

(a) Montrer que l'intervalle  $[0, 1]$  est stable par  $f$ .

(b) Soit la suite récurrente  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \cos u_n & \forall n \geq 0 \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

Répondez aux questions i et ii sans essayer de calculer les points fixes.

i. Démontrer que  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont convergentes.

ii. Posons  $l = \lim u_{2n}$  et  $l' = \lim u_{2n+1}$

A. Démontrer que  $l = \cos l'$  et que  $l' = \cos l$ .

B. Utilisez le théorème des accroissements finis pour montrer que  $l = l'$ .

C. Donner la nature de  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

### Exercice 3 (3+1,5 points)

1. Soient  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$  et  $h(x) = x^m |x|$ .

(a) Montrer que  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et donner  $h'(x)$ .

(b) Montrer que  $h'(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et donner  $h''(x)$ .

(c) Pour  $m \geq 2$  fixé, déterminer la classe  $C^n(\mathbb{R})$  de  $h$  et donner l'expression de  $h^{(n)}(x)$ .

Tournez la page s'il vous plaît

2. En utilisant la formule de Taylor avec reste de Lagrange au voisinage de 0 à l'ordre 4 de  $e^x$  ; calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}\right)}{x^4}$$

**Exercice 4 (4 points)**

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que  $f(0) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  . *f continue sur  $\mathbb{R}$*

1. Montrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $|x| > \delta \implies f(x) \leq \frac{1}{2}$ .
2. Montrer que  $f$  est bornée et possède un maximum local.

**Bon courage**